

Matchings in Graphen – Der Heiratssatz und seine Verwandten

Frank Blendinger

27. Juni 2006

1 Einführung

Definition 1 (Matching). Eine Teilmenge $M \subset E$ der Kantenmenge heisst *Matching*, falls je zwei verschiedene Kanten aus M keine gemeinsamen Knoten haben. Es gilt also:

$$\forall e, e' \in M : e \neq e' \rightarrow e \cap e' = \emptyset$$

Als *perfekt* bezeichnet man ein Matching, wenn alle Knoten aus V von M -Kanten überdeckt werden. Dann gilt natürlich $\#V = 2 \cdot \#M$.

In bipartiten Graphen $G = (A \uplus B, E)$ bezeichnet man ein Matching M mit $\#M = \#A$ als *komplettes Matching* (in Bezug auf A).

Ein Matching heisst *maximal*, wenn keine weitere Kante aus E hinzugefügt werden kann, ohne die Matchingeigenschaft zu verletzen. Als *maximum Matching* bezeichnet man ein Matching mit maximaler Kardinalität. Es gibt in jedem Graphen mindestens ein maximum Matching, welches natürlich auch immer maximal ist. Der Parameter $\tau(G)$ gibt die maximale Größe $\#M$ eines Matchings in G an.

Definition 2 (Vertex cover). Eine Teilmenge $C \subset V$ der Knotenmenge heisst *vertex cover* oder *Knotenüberdeckung*, falls jede Kante aus E mit mindestens einem Knoten aus C inzidiert, also:

$$\forall e = \{x, y\} \in E : x \in C \vee y \in C$$

Der Parameter $\nu(G)$ gibt die minimale Größe $\#C$ eines vertex covers in G an.

Definition 3 (Nachbarschaft). Unter der Nachbarschaft $\Gamma_G(X)$ einer Teilmenge $X \subset V$ der Knotenmenge versteht man die Menge aller Knoten aus $(V - X)$, die durch mindestens eine Kante aus E mit einem Knoten aus X verbunden sind:

$$\Gamma_G(X) = \{v \in (V - X) : \exists x \in X : \{v, x\} \in E\}$$

2 Das MinMax-Theorem von KÖNIG

Satz 1 (KÖNIGS MinMax-Theorem). Für jeden bipartiten Graphen $G = (A \uplus B, E)$ ist die minimale Größe eines vertex covers gleich der maximalen Größe eines Matchings, also $\nu(G) = \tau(G)$.

Beweis. Die Ungleichung $\nu(G) \leq \tau(G)$ gilt offensichtlich, da für ein vertex cover von jeder Matchingkante genau ein Knoten benötigt wird, sowie ggf. noch zusätzliche Knoten um alle Kanten abzudecken. Es ist also nur noch die Ungleichung $\nu(G) \geq \tau(G)$ zu zeigen, aus der dann die Gleichheit folgt.

Zunächst folgende Vorüberlegung: Wenn aus einem Graphen G eine Kante e entfernt wird, so gilt für den Graphen $G' = (G - e)$: $\tau(G) \geq \tau(G')$ sowie $\nu(G) \geq \nu(G')$. Wir wollen einen Graphen als τ -kritisch bezeichnen, falls das Weglassen einer beliebigen Kante dazu führt, dass der Wert von τ kleiner wird, also $\forall e \in E : \tau(G - e) = \tau(G) - 1$. Angenommen G sei nun ein bipartiter nicht τ -kritischer Graph, aus dem durch Entfernen einer Kante ein Graph G' konstruiert wird, der den gleichen τ -Wert hat, also $\tau(G) = \tau(G')$. Wenn die zu zeigende Ungleichung bereits für G' gilt, so gilt sie auch für G , da $\nu(G) \geq \nu(G') \geq \tau(G') = \tau(G)$. Wir können uns also auf τ -kritische Graphen beschränken.

Sei G also nun ein τ -kritischer Graph ohne isolierte Kanten (diese beeinflussen weder $\tau(G)$ noch $\nu(G)$ und können daher ignoriert werden). G muss unter diesen Bedingungen ausschliesslich aus disjunkten Kanten bestehen. Für einen derartigen Graphen gilt offensichtlich $\nu(G) = \tau(G)$ – ein maximum Matching besteht aus allen Kanten und ein minimales vertex cover muss pro Matchingkante genau einen Knoten enthalten.

Angenommen G bestehe nicht ausschliesslich aus disjunkten Kanten, es gibt also einen Knoten a , von dem zwei Kanten f und g ausgehen. Wir konstruieren nun durch das Entfernen der Kanten f und g zwei neue Graphen $G - f$ und $G - g$. Da G τ -kritisch ist, haben diese jeweils ein vertex cover C_f respektive C_g mit $\#C_f = \#C_g = \tau(G) - 1$. Sei $\Delta = C_f \oplus C_g$ die symmetrische Differenz dieser beiden vertex covers und $t = \#(C_f \cap C_g)$ die Kardinalität der Schnittmenge. Dann gilt:

$$\#\Delta = (\tau(G) - 1) + (\tau(G) - 1) - 2t = 2(\tau(G) - 1 - t)$$

Wir betrachten nun $G' = \{\{a\} \cup \Delta\}$. G' ist bipartit und hat $2(\tau(G) - 1 - t) + 1$ Knoten, daher kann ein Matching nicht mehr als $\tau(G) - 1 - t$ Kanten enthalten (man stelle sich einen bipartiten Graphen mit $\tau(G) - 1 - t$ Knoten in A und $\tau(G) - t$ Knoten in B vor, hier kann ein Matching im günstigsten Fall ganz A abdecken), es gilt also: $\tau(G') \leq \tau(G) - 1 - t$.

Sei T' ein vertex cover von G' mit $\#T' \leq \tau(G) - 1 - t$. Für $T = T' \uplus (C_f \cap C_g)$ gilt dann $\#T \leq \tau(G) - 1$ und somit auch $\#T < \tau(G)$. Wir zeigen nun, dass das so konstruierte T auch ein vertex cover von G ist, was der Ungleichung widerspricht – kein vertex cover in G darf eine kleinere Kardinalität als $\tau(G)$ haben.

Wenn e eine beliebige Kante aus G ist, so sind folgende Fälle möglich:

1. e ist eine der Kanten f oder g .
 e gehört zu den Kanten von G' und wird somit von T' abgedeckt.
2. e wird sowohl von C_f als auch von C_g überdeckt.
 - (a) Mindestens einer der Knoten von e gehört zu $C_f \cap C_g$.
 e wird von $C_f \cap C_g$ abgedeckt.
 - (b) Einer der Knoten von e gehört zu $C_f - C_g$, der andere zu $C_g - C_f$.
 e gehört zu G' und wird daher von T' abgedeckt.

T deckt also alle Kanten $e \in E$ von G ab und ist somit vertex cover von G . Da dies ein Widerspruch zu $\#T < \tau(G)$ ist, muss unsere Annahme, dass G nicht ausschliesslich aus disjunkten Kanten bestehe, falsch sein und damit folgt $\nu(G) = \tau(G)$. \square

3 Der Heiratssatz von P. HALL

Der Heiratssatz beschreibt eine einfache Möglichkeit die Existenz von *kompletten Matchings* in bipartiten Graphen zu überprüfen. Er besagt, dass in einem bipartiten Graphen, in dem A eine Gruppe von Jungen und B eine Gruppe von Mädchen darstellt und die Kanten eine Freundschaftsbeziehung symbolisieren, genau dann eine „Massenhochzeit“, bei der jeder Junge mit einem befreundeten Mädchen verheiratet wird, möglich ist, wenn für jede beliebige Menge von Jungen die Anzahl der befreundeten Mädchen mindestens so groß wie die Menge der Jungen ist. Dass diese offensichtlich notwendige Bedingung auch hinreichend ist, mag zunächst verblüffen, soll in diesem Abschnitt aber auf verschiedene Arten bewiesen werden.

Bedauerlicherweise gehen bei einer solchen Hochzeit einige Mädchen leer aus, wenn die Anzahl der Mädchen größer als die der Jungen ist. Die entsetzte Leserin möge in diesem Fall gerne die Bezeichnung von Jungen und Mädchen vertauschen. Bei gleich vielen Jungen und Mädchen liegt dieses Problem natürlich nicht vor. Der Heiratssatz ermöglicht dann auch die Suche nach einem *perfekten Matching*.

3.1 Beweis mit dem Satz von KÖNIG

Als erstes wollen wir zeigen, dass der Heiratssatz eine direkte Folgerung aus dem Satz von KÖNIG ist, also der Gleichheit von $\nu(G)$ und $\tau(G)$ in allen bipartiten Graphen G .

Zunächst mache man sich klar, dass in einem bipartiten Graphen $G = (A \uplus B, E)$ für jede Teilmenge $X \subset A$ die Menge $(A - X) \uplus \Gamma(X)$ ein vertex cover ist. Man wählt also für ein X aus B alle benachbarten Knoten und deckt damit alle Kanten zwischen X und $\Gamma(X)$ ab. Die verbleibenden Kanten inzidieren jeweils mit Knoten aus dem Rest von A , werden also von dem $(A - X)$ überdeckt. Alle minimalen vertex covers haben diese Gestalt. Der Wert von $\tau(G)$ entspricht also der kleinsten möglichen Größe dieser Teilmengen. Andererseits kann man bei der Suche nach einem minimum vertex cover auch zunächst ganz A hernehmen, und dann eine Teilmenge $X \subset A$ entfernen und die Nachbarn $\Gamma(X)$ von X in B hinzufügen, hat dann also ein vertex cover der Größe $\#A - \#X + \#\Gamma(X)$. Daraus lässt sich dieser Beziehung herstellen:

$$\tau(G) = \min_{X \subseteq A} (\#(A - X) + \#\Gamma(X)) = \#A - \underbrace{(\max_{X \subseteq A} \#X - \#\Gamma(X))}_{\delta}$$

Es gilt $\delta \geq 0$ (man wähle $X = \emptyset$) und damit

$$\delta = 0 \Leftrightarrow \forall X \subseteq A : \#\Gamma(X) \geq \#X \quad (1)$$

Wegen dem Satz von KÖNIG gilt $\tau(G) = \nu(G)$ und somit

$$\nu(G) = \#A - \delta \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt nun unmittelbar der Heiratssatz.

Satz 2 (Heiratssatz von P. HALL, 1935). *Ein bipartiter Graph $G = (A \uplus B, E)$ mit hat genau ein Matching M mit $\#M = \#A$, wenn gilt:*

$$\forall X \subseteq A : \#\Gamma_G(X) \geq \#X$$

Diese Ungleichung wird auch als „Hall-Bedingung“ bezeichnet.

3.2 Beweis nach HALENOS, VAUGHAN

Beweis (Heiratssatz nach HALENOS, VAUGHAN). Eine alternativer Beweis des Heiratssatzes führt über eine Induktion über $\#A$. Für $\#A = 0$ und $\#A = 1$ ist offensichtlich, dass der Heiratssatz gilt. Im Folgenden bezeichnen wir eine Teilmenge $\emptyset \neq X \subsetneq A$ als *kritisch*, wenn sie die Hall-Bedingung mit Gleichheit erfüllt: $\#\Gamma_G(X) = \#X$. Man betrachtet für eine bipartiten Graphen $G = (A \uplus B, E)$, der die Hall-Bedingung erfüllt, zwei mögliche Fälle:

1. Es existiert eine kritische Teilmenge $\emptyset \neq A' \subsetneq A$:

Wir konstruieren zwei Graphen G_1 und G_2 aus G : G_1 enthalte die Knoten der kritischen Teilmenge und ihre Nachbarn, also $G_1 = G[A' \uplus \Gamma_G(A')]$, G_2 die jeweils übrigen Knoten: $G_2 = G[(A - A') \uplus (B - \Gamma_G(A'))]$.

G_1 erfüllt die Hall-Bedingung, da A' eine kritische Teilmenge war. Bei G_2 ist dies zunächst nicht klar, da die Kanten aus G von $(A - A')$ zu $\Gamma_G(A')$ in G_2 fehlen.

Sei $X' \subseteq (A - A')$ und $X = X' \cup A' \subseteq A$. Mit der Hall-Bedingung von G folgt dann:

$$\#\Gamma_G(X) \geq \#X = \#X' + \#A' \quad (3)$$

Außerdem gilt:

$$\Gamma_G(X) = \Gamma_G(X' \uplus A') = \Gamma_{G_2}(X') \uplus \Gamma_{G_1}(A')$$

und damit auch:

$$\#\Gamma_G(X) = \#\Gamma_{G_2}(X') + \#\Gamma_{G_1}(A')$$

A' war eine kritische Teilmenge, also $\#A' = \#\Gamma_G(A')$, womit weiter folgt:

$$\#\Gamma_G(X) = \#\Gamma_{G_2}(X') + \#A'$$

Eingesetzt in (3) ergibt dies:

$$\#\Gamma_{G_2}(X') + \#A' \geq \#X' + \#A'$$

also $\#\Gamma_{G_2}(X') \geq \#X'$, d.h. die Hall-Bedingung für G_2 .

2. Es existiert keine kritische Teilmenge:

Es gilt also für alle $\emptyset \neq X \subsetneq A : \# \Gamma_G(X) > \# X$.

Man entfernt eine Kante $\{a, b\}$ aus G und konstruiert einen neuen Graphen G' :

$$G' = G[(A - \{a\}) \uplus (B - \{b\})]$$

Wir betrachten in G' eine Teilmenge $\emptyset \neq X \subsetneq A - \{a\}$. X hatte in G entweder b als Nachbarn oder nicht, also:

$$\# \Gamma_{G'}(X) \geq \# \Gamma_G(X) - 1$$

Da keine kritische Teilmenge in G existiert, gilt auch $\Gamma_G(X) - 1 \geq \# X$ und somit $\# \Gamma_{G'}(X) \geq \# X$, also die Hall-Bedingung für G' .

Per Induktion gibt es also ein Matching M' in G' mit $\# M' = \# A - 1$. Ein Matching M in G erhält man einfach mit $M = M' \uplus \{\{a, b\}\}$. \square

3.3 Beweis des MinMax-Theorems von KÖNIG mit Hilfe des Heiratssatzes

Mit Hilfe des Heiratssatzes kann man sehr leicht das im vorherigen Abschnitt behandelte MinMax-Theorem herleiten. Zur Erinnerung: Das Theorem besagt, dass in jedem bipartiten Graphen die Größe eines maximum Matchings mit der Kardinalität eines minimum vertex covers übereinstimmt, als dass $\nu(G) = \tau(G)$.

Beweis (MinMax-Theorem von KÖNIG mit Hilfe des Heiratssatzes). Wir betrachten einen bipartiten Graphen $G = (A \uplus B, V)$. Auch bei diesem Beweis genügt es wieder die Ungleichung $\nu(G) \geq \tau(G)$ zu zeigen (es ist klar, dass für ein vertex cover von jeder Matchingkante mindestens ein Knoten gewählt werden muss, also dass $\nu(G) \leq \tau(G)$).

Zunächst folgende Überlegung: ganz A ist offensichtlich ein vertex cover der Größe $\# A$. Man erhält jeweils ein neues vertex cover, wenn man eine Teilmenge $X \subseteq A$ durch ihre Nachbarmenge $\Gamma_G(X)$ ersetzt. Die Größe des neuen covers ist dann $\# A - \# X + \# \Gamma_G(X)$. Bei der Suche nach einem minimum vertex cover ist also ein X zu finden, das eine möglichst kleine Nachbarmenge hat, so dass $\# X - \# \Gamma_G(X)$ maximal wird. Es gilt:

$$\tau(G) = \# A - (\max_{X \subseteq A} (\# X - \# \Gamma_G(X))) = \# A - \delta$$

Sei D eine zu $A \uplus B$ disjunkte Knotenmenge mit $\# D = \delta$. Wir fügen diese Knoten zu B hinzu und fügen zusätzlich neue Kanten ein, so dass jeder Knoten aus A mit jedem Knoten aus D inzidiert, und erhalten so einen neuen Graphen $G' = G[A \uplus (B \cup D), E \cup (A \times D)]$.

In G' gilt die Hall-Bedingung, da für alle $X \subseteq A$:

$$\Gamma_{G'}(X) = \Gamma_G(X) \cup D \rightarrow \# \Gamma_{G'}(X) = \# \Gamma_G(X) + \delta \geq \# X$$

Somit ist $\nu(G') = \# A$, es existiert also ein komplettes Matching von A in G' . Wenn wir dieses Matching auf G übertragen, so müssen wir die Kanten zu D entfernen – dies sind jedoch maximal δ viele, also:

$$\nu(G) \geq \# A - \delta = \tau(G)$$

\square

4 Matchings in allgemeinen Graphen

Nachdem wir uns bisher auf bipartite Graphen beschränkt haben, sollen in diesem Abschnitt allgemeine Graphen zum Zuge kommen. Ein häufig auftretendes Problem ist hier die Suche nach einem maximum Matching und die Frage, ob ein perfektes Matching existiert (was sich nach der Konstruktion eines maximum Matchings natürlich sofort offenbart). Zunächst einige Definitionen, jeweils für einen Graphen $G = (V, E)$ und ein zugehöriges Matching M von G :

Definition 4. Einen Knoten $v \in V$ bezeichnet man als *M-frei*, wenn er mit keiner Kante aus M inzidiert.

Definition 5. Ein *M-alternierender Pfad* (oder kurz *alternierender Pfad*) ist ein Pfad $P : v_1 - v_2 - v_3 - \dots - v_k$ in G , dessen Kanten abwechselnd in M und nicht in M liegen:

$$\{v_i, v_{i+1}\} \in M \Leftrightarrow \{v_{i+1}, v_{i+2}\} \notin M \quad (1 \leq i \leq k-2)$$

Ein *M-augmentierender Pfad* ist ein *M-alternierender Pfad*, bei dem v_1 und v_k *M-freie* Knoten sind.

Mit *M-augmentierenden Pfaden* kann man aus einem gegebenen Matching sehr einfach ein neues, größeres Matching erzeugen, indem man die Zugehörigkeit der Kanten des Pfades zum Matching invertiert. Auf dieser Tatsache beruhen zahlreiche Algorithmen zur Konstruktion von maximum Matchings.

Lemma 1. Sei M ein Matching im Graphen G und P ein *M-augmentierender Pfad*. Es gilt $M \oplus P$ ist Matching in G mit $\#(M \oplus P) = \#M + 1$.

Beweis. Seien e und f zwei beliebige Kanten in $M \oplus P$. Es sind drei mögliche Fälle zu unterscheiden:

1. $e, f \in (P - M)$:
 e und f haben keine gemeinsamen Knoten.
2. $e, f \in (M - P)$:
Auch in diesem Fall haben e und f keinen Knoten gemeinsam.
3. $e \in (P - M), f \in (M - P)$:
Angenommen e und f haben einen gemeinsamen Knoten v . v muss Endknoten von P sein, also *M-frei*. Andererseits muss v aber auch mit einer Kante aus $(M - P)$ inzidieren, was ein Widerspruch ist.

Also ist $M \oplus P$ ein Matching. Es bleibt lediglich noch die Kardinalität zu überprüfen.

Der *M-augmentierende Pfad* P enthalte k Matchingkanten und somit $k + 1$ Nicht-Matchingkanten. Wenn M m Kanten enthielt, dann enthält $(M - P)$ genau $m - k$ Kanten. $(P - M)$ enthält $k + 1$ Kanten, also hat das Matching $M \oplus P$ insgesamt $m + 1$ Kanten. \square

Satz 3. Sind M und N Matchings von G mit $\#M < \#N$, dann enthält $M \oplus N$ mindestens $\#N - \#M$ *M-augmentierende Pfade*.

Beweis. Der Graph $G' = (V, M \oplus N)$ besteht aus Zusammenhangskomponenten, die je zu einem der folgenden drei Typen gehören:

1. isolierte Knoten
2. Zyklen gerader Länge mit Kanten abwechselnd aus $(M - N)$ und $(N - M)$
3. alternierende Pfade mit Kanten abwechselnd aus $(M - N)$ und $(N - M)$

Seien C_1, C_2, \dots, C_g die Komponenten von G' mit $C_i = (V_i, E_i)$ und bezeichne $\delta(C_i) = \#(E_i \cap N) - \#(E_i \cap M)$ die numerische Differenz der Zugehörigkeit zu N bzw. M . Klarerweise gilt $\delta(C_i) \in \{-1; 0; +1\}$ und C_i ist genau dann ein M -augmentierender Pfad, wenn $\delta(C_i) = 1$. Summiert man über alle Komponenten, so erhält man:

$$\sum_{1 \leq i \leq g} \delta(C_i) = \#(N - M) - \#(M - N) = \#N - \#M$$

Daraus folgt, dass es mindestens $\#N - \#M$ M -augmentierende Pfade geben muss. \square

Aus Satz 3 und Lemma 1 folgt direkt:

Korollar 1 (Theorem von BERGE). *Ein Matching M in einem Graphen G ist genau dann ein maximum Matching, wenn es keine M -augmentierende Pfade in G gibt.*

Mit diesem Handwerkszeug ausgestattet ist man in der Lage in beliebigen Graphen maximum Matchings zu konstruieren, indem man mit einem Matching (ggf. einem leeren) beginnt, augmentierende Pfade sucht und in diesen die Zugehörigkeit zum Matching invertiert. Diese Vorgehensweise ist als „ungarische Methode“ bekannt geworden – ausführliche Informationen zu entsprechenden Algorithmen finden sich in der Fachliteratur.

Zum Abschluß soll mit Hilfe augmentierender Pfade ein weiteres Mal der Heiratssatz aus Kapitel 3 bewiesen werden.

Beweis (Heiratssatz mit dem Theorem von BERGE). Es ist zu zeigen, dass in einem bipartiten Graphen $G = (A \uplus B, E)$ genau dann ein komplettes Matching von A nach B existiert, wenn $\forall X \subset A : \#\Gamma_G(X) \geq \#X$ gilt.

Die Hinrichtung ist klar, die Hall-Bedingung gilt natürlich für ein komplettes Matching von A nach B . Für den Beweis der Rückrichtung sei M ein maximum Matching und G erfülle die Hall-Bedingung.

Angenommen es existiert ein Knoten u in A , der mit keiner Matchingkante inzidiert, also M -frei ist. M wäre dann kein komplettes Matching von A nach B . Wir betrachten alle von u ausgehenden M -alternierenden Pfade. Sei S die Menge der Knoten in A und T die Menge der Knoten in B , die auf diesen Pfaden liegen. Jeder Knoten in $S - \{u\}$ liegt zusammen mit genau einem Knoten aus T auf einer Matchingkante, also gilt $\#S = \#T + 1 \rightarrow \#T < \#S$. Wir nehmen weiter an, es gäbe einen Knoten $v \in B$, der in $\Gamma_G(S) - T$ liegt. Dann würde es einen M -augmentierenden Pfad von u nach v geben, was nach dem Theorem von BERGE wegen der Maximalität von M nicht gestattet ist. Daher ist $\Gamma_G(S) = T$ und somit $\#\Gamma_G(S) = \#T < \#S$, was die Hall-Bedingung verletzt.

Aus diesem Widerspruch folgt, dass M ein komplettes Matching von A nach B sein muss. \square